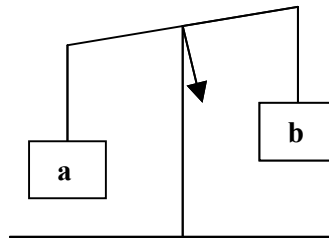


ZADANIE 1. Ważenie

Danych jest n przedmiotów o niewielkich gabarytach i różnych wagach. Jest też do dyspozycji waga z dwiema szalkami, ale nie ma odważników. Kładąc na wadze przedmioty **a** i **b**, za pomocą jednego ważenia można ustalić, który przedmiot jest lżejszy (zob. rys. 1).



Rysunek 1. Schematy ważenia

Trzeba wybrać najlżejszy i najcięższy przedmiot spośród n przedmiotów, posługując się tylko taką wagą.

- Jaka jest najmniejsza liczba ważeń, którą trzeba wykonać, aby znaleźć najlżejszy przedmiot? Odpowiedź uzasadnij.
- Podaj specyfikację zadania jednoczesnego znajdowania najlżejszego i najcięższego przedmiotu za pomocą tej wagi. Zapisz algorytm (w postaci listy kroków, schematu blokowego lub wykorzystując język programowania) dla tego zadania, który wykonuje możliwie najmniej ważeń.
- Podaj, jaka jest liczba ważeń, którą trzeba wykonać w podanym przez Ciebie algorytmie jednoczesnego znalezienia najlżejszego i najcięższego przedmiotu. Odpowiedź uzasadnij.

Punktacja:

Części zadania	Maks.
a	3
b	8
c	3
Razem:	14

ROZWIĄZANIE

Komentarz. Ważenie przedmiotów za pomocą opisanej wagi należy traktować jako porównanie wagi dwóch przedmiotów, zatem tę wagę można uznać za urządzenie do wykonywania porównań między przedmiotami.

Punkt a.

Aby znaleźć najlżejszy przedmiot, należy wykonać $n - 1$ porównań (ważen) przedmiotów. Na przykład, po ustawieniu przedmiotów w jakiejś kolejności, rozpoczynamy od porównania pary pierwszych dwóch przedmiotów, a następnie $n - 2$ razy dobieramy pozostałe przedmioty, pozostawiając za każdym razem na wadze przedmiot najlżejszy.

Aby wykazać, że nie można znaleźć najlżejszego przedmiotu wykonując mniej ważen niż $n - 1$ wystarczy zauważyć, że każdy przedmiot, poza najlżejszym, musi zostać uznany za cięższy w przynajmniej jednym ważeniu.

Komentarz. Opisana metoda może być zastosowana również do znalezienia najcięższego przedmiotu.

Punkt b.

Specyfikacja:

Dane: n przedmiotów o niewielkich gabarytach i różnych wagach.

Wynik: najlżejszy i najcięższy przedmiot wśród danych.

Algorytm

Krok 1. {Podział zbioru przedmiotów na dwa podzbiory – kandydatów na najlżejszy przedmiot i kandydatów na najcięższy przedmiot.} Oznaczmy pierwszy zbiór przedmiotów przez M , a drugi – przez N . Łączymy przedmioty w pary i kładziemy je na wadze w ten sposób. Przedmiot lżejszy dodajemy do zbioru M , a cięższy do zbioru N . Jeśli liczba wszystkich przedmiotów jest nieparzysta, to w tym ważeniu parami nie weźmie udziału jeden przedmiot – wyróżnimy go w jakiś sposób.

Krok 2. {Znajdowanie najlżejszego przedmiotu.} Znajdź najlżejszy przedmiot w zbiorze przedmiotów M . Jeśli liczba wszystkich przedmiotów na początku była nieparzysta, to wyróżniony w *Kroku 1* przedmiot porównujemy na wadze z najlżejszym przedmiotem w zbiorze M i zatrzymujemy lżejszy z nich.

Krok 3. {Znajdowanie najcięższego przedmiotu.} Znajdź najcięższy przedmiot w zbiorze przedmiotów N . Jeśli liczba wszystkich przedmiotów na początku była nieparzysta, to wyróżniony w *Kroku 1* przedmiot porównujemy na wadze z najcięższym przedmiotem w zbiorze N i zatrzymujemy cięższy z nich.

Punkt c.

Określmy najpierw liczbę ważen, wykonanych w algorytmie z punktu b, w przypadku, gdy liczba przedmiotów n jest nieparzysta. W *Kroku 1* jest wykonywanych $n/2$ ważen, po których oba zbiory M i N zawierają po $n/2$ przedmiotów. Następnie w *Kroku 2* i w *Kroku 3*, zgodnie z punktem a, jest wykonywanych po $n/2 - 1$ ważen. A zatem w sumie, liczba wszystkich wykonanych ważen w tym przypadku wynosi:

$$n/2 + (n/2 - 1) + (n/2 - 1) = 3n/2 - 2$$

Jeśli liczba wszystkich przedmiotów jest nieparzysta, to w *Kroku 1* jest wykonanych $(n - 1)/2$ ważeń, po których oba zbiory M i N zawierają po $(n - 1)/2$ przedmiotów. Następnie w *Kroku 2* i w *Kroku 3*, zgodnie z punktem a i opisem algorytmu, jest wykonywanych po $(n - 1)/2 - 1 + 1$ ważeń. A zatem w sumie, liczba wszystkich wykonanych ważeń w tym przypadku wynosi:

$$(n - 1)/2 + (n - 1)/2 + (n - 1)/2 = 3(n - 1)/2.$$

Zauważmy, że ponieważ w tym przypadku n jest liczbą nieparzystą, wartość wyrażenia po prawej stronie jest liczbą naturalną.

Komentarz. Przedstawione w rozwiązaniu metody znajdowania minimum, maksimum i jednoczesnego znajdowania minimum i maksimum są **algorytmami optymalnymi** pod względem złożoności obliczeniowej, a dokładniej – liczby wykonywanych porównań.

MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

Zasady oceniania

- Za rozwiązanie zadań z arkusza I można uzyskać maksymalnie 40% całkowitej liczby punktów.
- Model odpowiedzi uwzględnia jej zakres merytoryczny, a nie jest ścisłym wzorcem sformułowania (poza odpowiedziami jednowyrazowymi i do zadań zamkniętych).
- Za odpowiedzi do poszczególnych zadań przyznaje się pełne punkty.
- Za zadania otwarte, za które można przyznać jeden punkt, przyznaje się punkt wyłącznie za odpowiedź w pełni poprawną.
- Za zadania otwarte, za które można przyznać więcej niż jeden punkt, przyznaje się tyle punktów, ile prawidłowych elementów odpowiedzi (zgodnie z wyszczególnieniem w kluczu) przedstawił zdający.

Model odpowiedzi i schemat punktowania

Numer zadania	Numer punktu	Oczekiwana odpowiedź	Maksymalna punktacja za część zadania	Maksymalna punktacja za zadanie
1	a	Za poprawną odpowiedź, liczba ważeń równa $n - 1$, z uzasadnieniem (każdy przedmiot różny od najlżejszego musi być uznany za cięższy w co najmniej jednym ważeniu) – 3 punkty . Za poprawną odpowiedź bez uzasadnienia – 2 punkt .	3	14
	b	Za podanie specyfikacji (dane: n przedmiotów o niewielkich gabarytach i różnych wagach; wyniki: najlżejszy i najcięższy przedmiot spośród danych) – 2 punkty . Za bezbłędny algorytm z $3n/2 - 2$ ważeniami – 6 punktów . Za poprawny, nieoptymalny algorytm z mniej niż $2n - 2$ ważeniami – 4 punkty . Jeśli któryś z powyższych algorytmów zawiera 1 błąd (np. jedna z granic pętli jest błędnie ustawiona lub nie uwzględniono nieparzystości liczby przedmiotów – odejmujemy 1 punkt od powyższej punktacji za algorytm. za każdy inny poprawny algorytm – 1 punkt .	8	
	c	Za podanie poprawnej liczby ważeń w algorytmie zapisanym przez ucznia w punkcie b wraz z uzasadnieniem – 3 punkty , bez uzasadnienia – 1 punkt .	3	