ZADANIE 1. Kraje

Cena (w walucie W) zapinek do skarpetek w Eurolandii, gdzie obowiązuje dziesiętny system liczenia, wynosi 21_{10} W, w Dwójkolandii, gdzie obowiązuje system dwójkowy, tę cenę zapisuje się jako □■□■□$_2$ W, zaś w Trójkolandii, gdzie posługują się systemem trójkowym – jako ⭘●○$_3$ W.

W tych trzech krajach wszystkie ceny są liczbami naturalnymi. Nie zawsze jednak ten sam towar ma taką samą cenę w różnych krajach. Na przykład, w Dwójkolandii cena półpancerza wynosi □■□□■□■$_2$ W, a w Trójkolandii – ●⭘○●$_3$ W.

a) Oblicz ceny półpancerzy praktycznych w Dwójkolandii i Trójkolandii w systemie dziesiętnym. Wyniki wpisz w poniższą ramkę.

Cena półpancerza w Dwójkolandii zapisana w systemie dziesiętnym wynosi:	$\mathbf{90_{10}}$
Cena półpancerza w Trójkolandii zapisana w systemie dziesiętnym wynosi:	$\mathbf{46_{10}}$

b) Oblicz różnicę między cenami wyższą i niższą półpancerzy praktycznych (w Dwójkolandii lub Trójkolandii) i tę różnicę ogłoś w każdym z trzech krajów, czyli zapisz w systemach liczenia tych krajów. Wyniki wpisz w poniższą ramkę.

Różnica w cenie półpancerza praktycznego, zapisana w systemie liczenia danego kraju, wynosi:
w Eurolandii: $\mathbf{44_{10}}$ w Dwójkolandii: □■□□■■$_2$ a w Trójkolandii: ●●⭘⭘$_3$

Podaj algorytm, w postaci listy kroków, schematu blokowego lub w języku programowania, który dokonuje zamiany liczby k, zapisanej w systemie pozycyjnym o podstawie p, na jej postać w systemie dziesiętnym, gdzie p jest dowolną liczbą naturalną z przedziału [2, 9]. Przyjmij, że:

Danymi w algorytmie są:

p, n, a_n, a_{n-1}, ..., a_0, gdzie p jest podstawą systemu liczenia, $n + 1$ jest liczbą cyfr liczby k, a a_n, a_{n-1}, ..., a_0 są kolejnymi cyframi liczby k (w systemie p), począwszy od cyfry najbardziej znaczącej.

Wynikiem jest wartość liczby k zapisana w systemie dziesiętnym.

Punktacja:

Części zadania	Maks.
a	2
b	3
c	9
Razem:	14

ROZWIĄZANIE

Punkt a.

Porównujemy cenę zapinek w systemie dwójkowym z ceną w Dwójkolandii, by otrzymać znaczenie symboli □ i ■.

$21_{10} = 10101_2$ = □■□■□$_2$, czyli □ = 1, ■ = 0.

A zatem, cena półpancerza w Dwójkolandii wynosi:

□■□□■□■$_2$ $= 1011010_2 = 1{\cdot}2^6 + 0{\cdot}2^5 + 1{\cdot}2^4 + 1{\cdot}2^3 + 0{\cdot}2^2 + 1{\cdot}2^1 + 0{\cdot}2^0 =$

$= 64 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 0 = 90_{10}$

Podobnie postępujemy z cenami w Trójkolandii i otrzymujemy:

$21_{10} = 210_3$ = ⭘●○$_3$, czyli ⭘ = 2, ● =1, ○ = 0

A zatem, cena półpancerza w Trójkolandii wynosi:

●⭘○●$_3$ $= 1201_3 = 1{\cdot}3^3 + 2{\cdot}3^2 + 0{\cdot}3^1 + 1{\cdot}3^0 = 27 + 18 + 0 + 1 = 46_{10}$

Punkt b.

Różnica pomiędzy ceną półpancerza w obu krainach, w systemie dziesiętnym wynosi:

$90_{10} - 46_{10} = 44_{10}$.

Znajdujemy jej reprezentację w systemie dwójkowym i w systemie trójkowym, dzieląc tę liczbę odpowiednio przez 2 i 3. W kolejnych wierszach w tabelach poniżej, w pierwszej kolumnie wpisano ilorazy, a w drugiej – reszty z dzielenia. Te reszty stanowią kolejne cyfry, począwszy od najmniej znaczących, szukanych reprezentacji.

44	
22	0
11	0
5	1
2	1
1	0
0	1

44	
14	2
4	2
1	1
0	1

A zatem otrzymujemy: $44_{10} = 101100_2$ = □■□□■■$_2$ $44_{10} = 1122_3$ = ●●⭘⭘$_3$

Punkt c.

Algorytm

Dane:

$p \in N$ – podstawa systemu z przedziału [2, 9];

$n \in N$ – rozmiar cyfr liczby k, liczba cyfr liczby k wynosi $n + 1$

$a_n, a_{n-1}, ..., a_0$ – kolejne cyfry liczby k (w systemie p), począwszy od cyfry najbardziej znaczącej; cyfry te należą do przedziału $[0, p - 1]$.

Wynik: wartość liczby k zapisana w systemie dziesiętnym.

Krok 1. Wczytaj: p, n;

Krok 2. Wczytaj a_n; $k := a_n$; $i := n$; {*i odgrywa rolę bieżącego indeksu – licznika iteracji*}

Krok 3. Dopóki $i > 0$, powtarzaj *Krok 4*, w przeciwnym razie przejdź do *Kroku 5*.

Krok 4. $i := i - 1$; wczytaj a_i; $k := k \cdot p + a_i$;

Krok 5. Wypisz k i zakończ algorytm.

Komentarz do algorytmu.

W punkcie a) tego zadania są obliczane wartości dziesiętne liczb zapisanych w systemie dwójkowym i trójkowym. Obliczenia zostały wykonane dla konkretnych wartości cyfr. W tej części zadania masz podać opis algorytmu, który będzie wykonywał podobne obliczenia dla dowolnej podstawy p z przedziału [2, 9] i dowolnego ciągu cyfr, reprezentującego liczbę zapisaną w systemie o podstawie p.

W punkcie a), zapewne postąpiłeś podobnie, jak zapisano w naszej propozycji rozwiązania – obliczyłeś wartości kolejnych składników i dodałeś je do siebie. Jest to jednak metoda dość pracochłonna. Najprostszy algorytm, zarówno pod względem zapisu, jak i liczby wykonywanych działań, polega na użyciu **schematu Hornera** – takie rozwiązanie jest właśnie oceniane najwyżej.

Dziesiętną wartość liczby k, zapisanej w systemie o podstawie p, można zapisać następująco:

$$(a_n, a_{n-1}, ..., a_0)_p = (k)_{10} = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_{n-2} \cdot p^{n-2} + ... + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 =$$

a następnie przekształcić (poprzez grupowanie składników i wyłączanie p w odpowiedniej potędze) do postaci, zwanej schematem Hornera:

$$= (...((a_n \cdot p + a_{n-1})\, p + a_{n-2})\, p + ... + a_1)\, p + a_0$$

Stąd wynika, że dziesiętną wartość liczby k można obliczyć w następujący sposób:

$k := a_n$;

$k := k \cdot p + a_i$ dla $i = n - 1, n - 2, ..., 1, 0$.

Podany w naszym rozwiązaniu algorytm jest realizacją tej metody.

Literatura. Sysło M.M., *Algorytmy*, WSiP, Warszawa 1997, 2002; p. 7.3.1.

MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

Zasady oceniania

- Za rozwiązanie zadań z arkusza I można uzyskać maksymalnie 40% całkowitej liczby punktów.
- Model odpowiedzi uwzględnia jej zakres merytoryczny, a nie jest ścisłym wzorcem sformułowania (poza odpowiedziami jednowyrazowymi i do zadań zamkniętych).
- Za odpowiedzi do poszczególnych zadań przyznaje się pełne punkty.
- Za zadania otwarte, za które można przyznać jeden punkt, przyznaje się punkt wyłącznie za odpowiedź w pełni poprawną.
- Za zadania otwarte, za które można przyznać więcej niż jeden punkt, przyznaje się tyle punktów, ile prawidłowych elementów odpowiedzi (zgodnie z wyszczególnieniem w kluczu) przedstawił zdający.

Model odpowiedzi i schemat punktowania

<table>
<tr><th>Numer zadania</th><th>Numer punktu</th><th>Oczekiwana odpowiedź</th><th>Maksymalna punktacja za część zadania</th><th>Maksymalna punktacja za zadanie</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1</td><td>a</td><td>Za 90 dla Dwójkolandii – 1 punkt.
Za 46 dla Trójkolandii – 1 punkt.</td><td>2</td><td rowspan="3">14</td></tr>
<tr><td>b</td><td>Za 44_{10} lub 44 dla Eurolandii – 1 punkt, za 101100_2 lub 101100 w systemie binarnym lub □■□□■■ dla Dwójkolandii – 1 punkt.
Za 1122_3 lub 1122 w systemie trójkowym lub ●●○○ dla Trójkolandii – 1 punkt. Za poprawne obliczenie różnicy z punktu a – 1 punkt.</td><td>3</td></tr>
<tr><td>c</td><td>Za podanie specyfikacji algorytmu – 1 punkt.
Poniższej ocenie podlega algorytm zapisany w postaci listy kroków, schematu blokowego, w języku programowania lub kombinacji tych notacji, w przeciwnym razie – 0 punktów za tę część zadania.
Za poprawne zinterpretowanie kolejności cyfr liczby – 1 punkt.
Za poprawnie zapisaną iterację – 1 punkt.
Za poprawnie działający algorytm dla konkretnej podstawy (np. $p = 2$) przy interpretacji danych przyjętej przez ucznia – 2 punkty, albo za poprawnie działający algorytm dla dowolnej podstawy przy interpretacji danych przyjętej przez ucznia – 4 punkty.
Za użycie schematu Hornera w obliczeniach – 2 punkty.</td><td>9</td></tr>
</table>